s. 112

9 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $a_0 = 1$ $a_1 = 1$

$\Rightarrow a_2 = a_1 + a_0 = 1+1 = 2$

$a_3 = 2+1 = 3$

$a_4 = 3+2 = 5$

$a_5 = 5+3 = 8$

$a_6 = 8+5 = 13$

$a_7 = 13+8 = 21$

b) Visa att $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+2} - 1$, $n \geq 0$

Ind. bas $n=0 \Rightarrow VL = a_0 = 1$

$HL = a_2 - 1 = 2-1 = 1$

$VL = HL$

Antag att påst. gäller för $n = p$

dvs. $\sum_{k=0}^{p} a_k = a_{p+2} - 1$

Påstående Gäller för $n = p+1$ dvs $\sum_{k=0}^{p+1} a_k = a_{p+3} - 1$

Bevis: $VL = \sum_{k=0}^{p+1} a_k = \underbrace{a_0 + a_3 + \cdots a_p}_{a_{p+2}-1 \text{ enl. påst.}} + a_{p+1} =$

$a_{p+2} - 1 + a_{p+1} = \underbrace{a_{p+2} + a_{p+1}}_{= a_{p+3}} - 1 = a_{p+3} - 1 = HL$

Enligt induktionsprincipen gäller formeln för alla $n \geq 0$ V.S.B

S. 113

20 Geom. talföljd: $t_n = t_0 \cdot a^n$

$t_4 + t_5 = 3 \Leftrightarrow t_0 \cdot a^4 + t_0 \cdot a^5 = 3$

$t_0 \cdot a^4 (1 + a) = 3 \quad *$

$t_9 + t_{10} = 9375 \Leftrightarrow t_0 a^9 + t_0 a^{10} = 9375$

$t_0 a^9 (1 + a) = 9375 \quad **$

Dividera ledvis

$\frac{t_0 a^9 (1+a)}{t_0 a^4 (1+a)} = \frac{9375}{3} \Leftrightarrow a^5 = 3125$

$a = 5$ ins. i $* \Rightarrow$

$t_0 5^4 (1+5) = 3 \qquad t_0 \cdot 625 \cdot \cancel{6}^2 = \cancel{3}^1 \qquad t_0 = 0{,}0008$

Talföljden ges av $t_n = 0{,}0008 \cdot 5^n$

s. 113

2/ a) $(a-b) \mid (a^2-b^2)$ välj ex vis $a=5$ $b=3$

$\Rightarrow a^2-b^2 = 5^2-3^2 = 25-9 = 16$

$a-b = 5-3 = 2$

$\frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{16}{2}$ dvs $(5-3)$ delar (5^2-3^2)

b) $(a-b) \mid (a^3-b^3)$ välj ex. vis $a=3$, $b=6$

$\Rightarrow a^3-b^3 = 3^3-6^3 = 27-216 = -189$

$a-b = 3-6 = -3$

$\Rightarrow \frac{a^3-b^3}{a-b} = \frac{-189}{-3} = 63$ dvs. $(3-6) \mid (3^3-6^3)$

c) Visa att $(a-b) \mid (a^n-b^n)$ för $a, b, n \in \mathbb{N}$

Ind. bas $n=1 \Rightarrow \frac{a^1-b^1}{a-b} = 1$ dvs $(a-b) \mid (a^1-b^1)$

Ind. antagande: antag att påståendet gäller för $n=p$ dvs $\frac{a^p-b^p}{a-b} = k$; $k \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow a^p-b^p = k\cdot(a-b)$; k positivt heltal

Påstående Formeln gäller för $n=p+1$ dvs

$a^{p+1}-b^{p+1} = l\cdot(a-b)$; l positivt heltal

Bevis $VL = a^{p+1}-b^{p+1} = a\cdot a^p - b\cdot b^p = a\cdot a^p - b\cdot b^p + ab^p - ab^p =$

$= aa^p - ab^p + ab^p - b\cdot b^p = a\underbrace{(a^p-b^p)}_{=k(a-b)\text{ enl. ant.}} + (a-b)b^p = (a+b^p)(a-b) =$

$= l\cdot(a-b) = HL$ Enligt Induktionsprincipen gäller påst. för alla n, $n \in \mathbb{N}$

s. 114

11. Visa att $\sum_{k=1}^{n} 4\cdot 5^{k-1} = 5^n - 1$

Induktionsbevis:

Induktionsbas: $k=1 \Rightarrow VL = \sum_{k=1}^{1} 4\cdot 5^{k-1} = 4\cdot 5^{1-1} = 4$

$$HL = 5^1 - 1 = 4$$

$$VL = HL.$$

Induktionsantagande: Formeln gäller för $n=p$

dvs: $\sum_{k=1}^{p} 4\cdot 5^{k-1} = 5^p - 1$

påstående: Formeln gäller för $n = p+1$

dvs. $\sum_{k=1}^{p+1} 4\cdot 5^{k-1} = 5^{p+1} - 1$

Bevis av påståendet

VL: $\sum_{k=1}^{p+1} 4\cdot 5^{k-1} = \underbrace{4 + 4\cdot 5 + 4\cdot 5^2 + \dots + 4\cdot 5^{p-1}}_{= 5^p - 1 \text{ enl. ind.antagande}} + 4\cdot 5^p =$

$$= 5^p - 1 + 4\cdot 5^p = 1\cdot 5^p + 4\cdot 5^p - 1 = 5\cdot 5^p - 1 = 5^{p+1} - 1 = HL$$

$VL = HL$

Enligt induktionsprincipen gäller påståendet för alla positiva heltal n.

s. 117

29 Visa att $n(n^2+2)$ är delbart med 3.

Delbart med 3 $\Rightarrow n\cdot(n^2+2) = 3\cdot k$. k heltal

Ind. bas $n=1 \Rightarrow 1(\cdot 1^2+2) = 1\cdot 3 = 3$

3 delbart med 3.

Antagande påståendet gäller för $n=p$

dvs $p(p^2+2) = 3\cdot k$; k heltal

påstående Gäller för $n=p+1$

dvs $(p+1)((p+1)^2+2) = 3m$; m heltal

Bevis
VL: $(p+1)((p+1)^2+2) = (p+1)(p^2+2p+1+2) =$

$\underbrace{p(p^2+2)}_{=3\cdot k \text{ enl. ant.}} + p(2p+1) + p^2 + 2p + 1 + 2 =$

$= 3\cdot k + 2p^2 + p + p^2 + 2p + 3 =$

$= 3\cdot k + \underbrace{3p^2 + 3p + 3}$ $=$

$= 3\cdot k + 3(p^2+p+1) = 3(k+p^2+p+1) = 3m =$ H.L

Enligt Induktionsprincipen gäller påst. för alla heltal n.